

---

---

---

## Glava 5

# FURIJEOV RED

Prilikom analize i obrade signala veoma je pogodno predstaviti složeni signal kao linearnu kombinaciju prostijih signala. Osim što ovakva predstava daje bolji uvid u prirodu signala, slijedeći princip linearnosti, obradu složenog signala možemo pojednostaviti putem obrade jednostavnih signala.

Ideja razlaganja signala na prostoperiodične komponente eksponencijalnog (kosinusnog, sinusnog) oblika potiče s kraja 18. vijeka, kada je francuski matematičar, fizičar i historičar Furije (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830), prilikom proučavanja oscilacija u fizici, tvrdio da se periodične kontinualne funkcije mogu razložiti na prostoperiodične komponente. On je svoja istraživanja pokušao da publikuje 1807. godine, ali tadašnja matematička javnost ih nije prihvatila. Rezultate istraživanja je Furije objavio 1822. godine u svojoj knjizi o prostiranju toplote (*Théorie analytique de la chaleur*), ali je njegova teorija priznata tek nakon formalnih dokaza koje je proveo matematičar Dirihle (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) 1829. godine. Nakon toga, Furijeova teorija je našla veoma široku primjenu u mnogim oblastima nauke: teoriji brojeva, kombinatorici, numeričkoj analizi, statistici, teoriji vjerovatnoće, kriptografiji, optici, akustici, okeanografiji, a posebno u analizi i obradi signala.

## 5.1 Razvoj kontinualnih periodičnih signala u Furijeov red

Pretpostavimo da možemo izvršiti dekompoziciju periodičnog kontinualnog signala  $\tilde{x}(t)$  na jednostavne kompleksne eksponencijalne signale  $C_k e^{jk\Omega_0 t}$ ,  $C_k \in \mathbb{C}$ :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Pri tome je  $T_0$  osnovni period signala, a varijabla  $\Omega$  ima prirodu učestanosti.

Ovakav zapis signala nazivamo *razvojem signala u Furijeov red* (*Fourier Series – FS*). Signali  $C_k e^{jk\Omega_0 t}$  se nazivaju *harmonijske komponente* signala ili *harmonici*, a razvoj signala u Furijeov red *harmonijska analiza*. Osnovni ili prvi harmonici su komponente  $C_{\pm 1} e^{\pm j\Omega_0 t}$  Furijeovog reda, dok je  $C_0$  jednosmjerna komponenta i predstavlja srednju vrijednost signala.

Da bi jednakost (5.1) bila zadovoljena, neophodno je odrediti kompleksne koeficijente  $C_k$ , koje nazivamo *spektralni koeficijenti* ili *koeficijenti Furijeovog reda*. Nakon množenja jednakosti (5.1) sa  $e^{-jl\Omega_0 t}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  i integracije na jednom periodu dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) e^{-jl\Omega_0 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jl\Omega_0 t} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} \right) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\Omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Budući da je za  $k \neq l$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\Omega_0 t} dt = \frac{e^{j(k-l)\Omega_0 t}}{j(k-l)\Omega_0} \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = 0, \quad (5.3)$$

a za  $k = l$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\Omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} 1 \cdot dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = T_0, \quad (5.4)$$

desna strana jednakosti (5.2) jednaka je nuli za svako  $k$ , osim za  $k=l$ , pa dobijamo:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) e^{-jl\Omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-l)\Omega_0 t} dt = C_l T_0, \quad (5.5)$$

odakle slijedi:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.6)$$

Pošto je vrijednost integrala (5.6) jednaka na svakom periodu, radi lakšeg pisanja usvojicemo sljedeću notaciju pri računanju koeficijenata Furijeovog reda:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

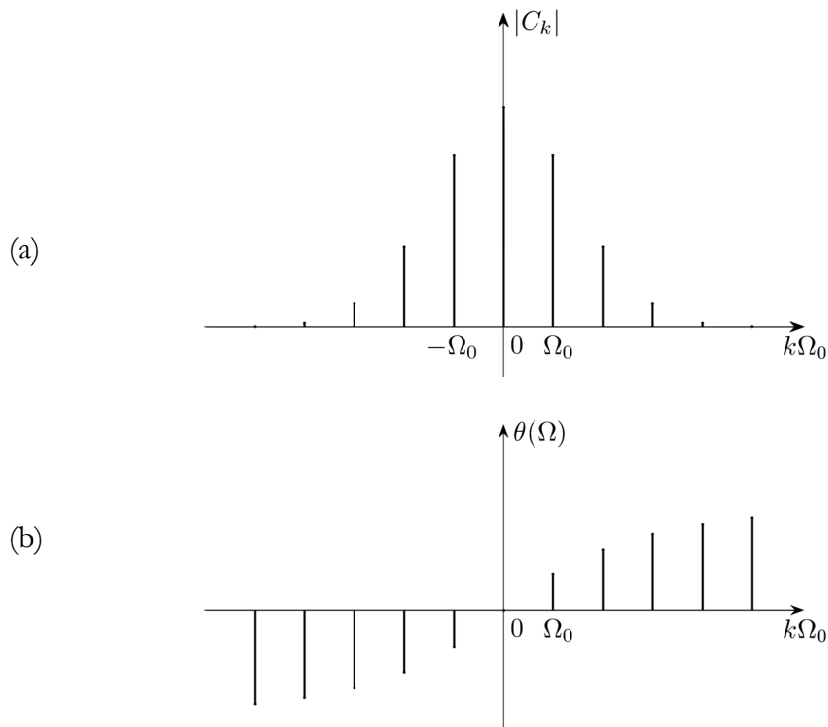
Sljedeće dvije jednakosti:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (5.8)$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.9)$$

predstavljaju *Furijeov transformacioni par* za kontinualne periodične signale. Prva jednakost transformacionog para, koja predstavlja periodičan kontinualan signal kao sumu elementarnih kompleksnih eksponencijalnih funkcija, je formula za *sintezu signala*, dok je druga jednakost, koja nam govori o vrijednostima koeficijenata Furijeovog reda kojima se množe elementarne kompleksne eksponencijalne funkcije prilikom sinteze signala, formula za *analizu signala*.

Skup od beskonačno mnogo spektralnih koeficijenata  $\{C_k = |C_k| e^{j \arg C_k}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  koje nose informaciju o elementarnim funkcijama oblika  $C_k e^{jk\Omega_0 t}$  na koje se razlaže kontinualan periodični signal  $\tilde{x}(t)$ , naziva se *spektar signala*. Spektar periodičnih signala je linijski (diskretan) jer je definisan samo u diskretnim, ekvidistantnim, tačkama  $\Omega = k\Omega_0$  frekvencijske ose.



Slika 5.1 Primjer (a) amplitudnog i (b) faznog spektra periodičnog signala.

Modul koeficijenata Furijeovog reda  $|C_k|$  nazivamo *amplitudni spektar signala*, a argument koeficijenata Furijeovog reda  $\theta_k = \arg C_k$  nazivamo *fazni spektar signala*. Način grafičke predstave spektra periodičnih kontinualnih signala prikazan je na Slici 5.1.

Amplitudni spektar nosi informaciju o modulima, a fazni spektar o fazama (pomaku u vremenu) pojedinačnih elementarnih kompleksnih eksponencijalnih funkcija čijim sumiranjem se dobija posmatrani signal. Koncept sinteze signala preko linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija prikazan je na Slici 5.2.

Posmatrajući izraz za analizu signala (5.9), jasno je da postoje signali koji se razlikuju u konačnom broju izolovanih singulariteta (prekidnih tačaka), a imaju jednake koeficijente Furijeovog reda, jer na vrijednost integrala

$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ne utiče konačan broj vrijednosti u izolovanim tačkama.

Zbog kontinualnosti kompleksne eksponencijalne funkcije  $e^{jk\Omega_0 t}$  vrijedi da je  $e^{jk\Omega_0 t_0^-} = e^{jk\Omega_0 t_0^+} = e^{jk\Omega_0 t_0}$ , pa dobijamo:

$$\tilde{x}(t_0^-) + \tilde{x}(t_0^+) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t_0^-} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t_0^+} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t_0} = 2\tilde{x}(t_0). \quad (5.10)$$

Rekonstrukcijom signala na osnovu koeficijenata Furijeovog reda u tačkama diskontinuiteta  $t_0$  rekonstruiše se srednja vrijednost:

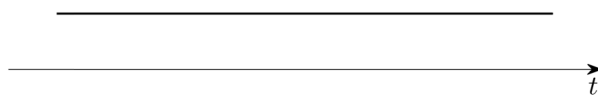
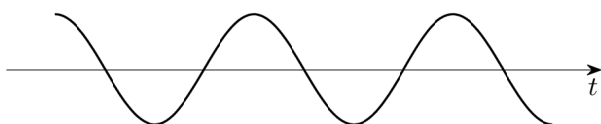
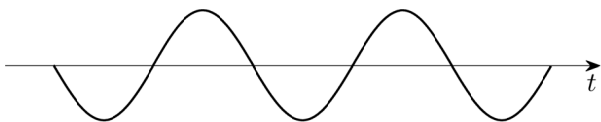
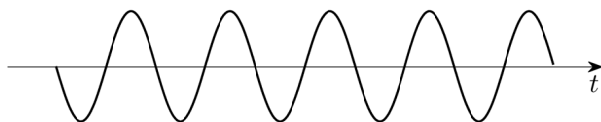
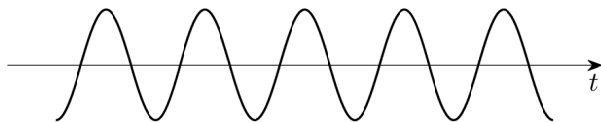
$$\tilde{x}(t_0) = \frac{1}{2} [\tilde{x}(t_0^-) + \tilde{x}(t_0^+)]. \quad (5.11)$$

Dakle, originalni i rekonstruisani signal se mogu razlikovati u konačnom broju diskretnih tačaka.

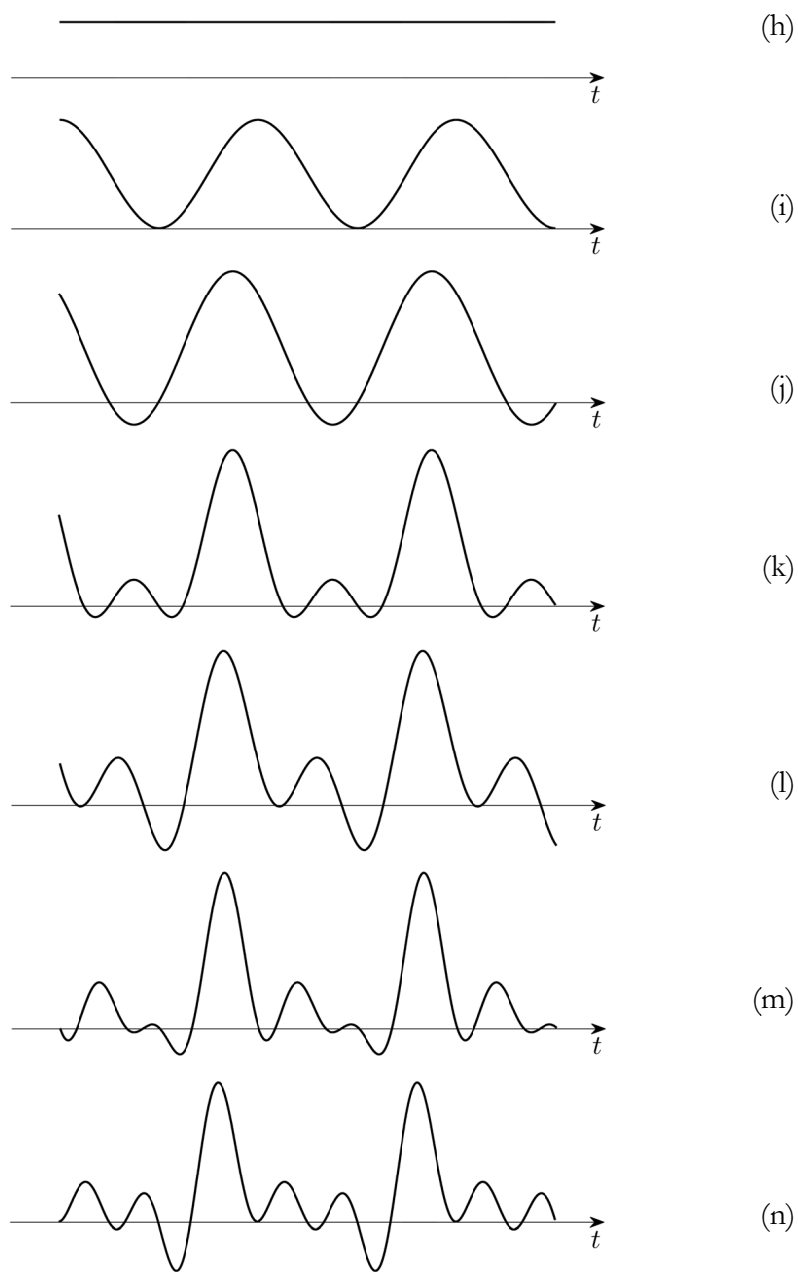
Da bi razvoj signala u Furijeov red bio moguć, potrebno je da integral i suma, u jednakostima za analizu i sintezu signala, konvergiraju. Dovoljne uslove za egzistenciju razvoja signala u Furijeov red formulisao je njemački matematičar Dirihle, te se zato i nazivaju *Dirihleovi uslovi*. Prema tim uslovima, za egzistenciju Furijeovog reda neophodno je da signal:

1. bude apsolutno integrabilan na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode, tj. da je  $\int_{t_0}^{t_0+T_0} |\tilde{x}(t)| dt < \infty$ ;
2. ima konačan broj minimuma i maksimuma na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode  $t_0 < t < t_0 + T_0$ ;
3. ima konačan broj diskontinuiteta (prekida prvog reda) na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode  $t_0 < t < t_0 + T_0$ .

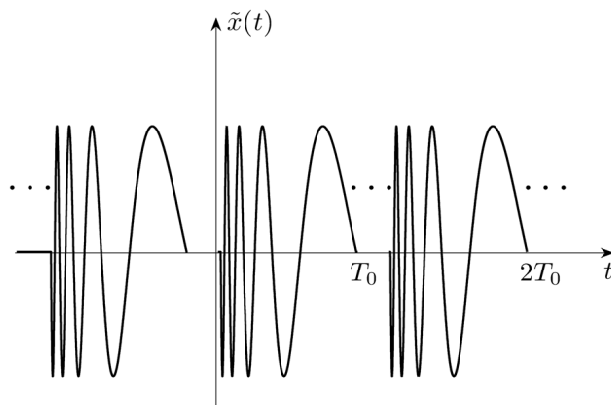
(a) jednosmjerna

(b)  $\sin(\Omega_0 t)$ (c)  $\cos(\Omega_0 t)$ (d)  $\sin(2\Omega_0 t)$ (e)  $\cos(2\Omega_0 t)$ (f)  $\sin(3\Omega_0 t)$ (g)  $\cos(3\Omega_0 t)$ 

Slika 5.2 Prikaz signala preko linearne kombinacije prostoperiodičnih funkcija: (a) jednosmjerna komponenta i (b-g) prostoperiodične komponente (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 5.2 (nastavak): (h)  $a$ ; (i)  $a+b$ ; (j)  $a+b+c$ ; (k)  $a+b+c+d$ ;  
 (l)  $a+b+c+d+e$ ; (m)  $a+b+c+d+e+f$  i (n)  $a+b+c+d+e+f+g$ .



Slika 5.3 Sinusoida promjenljive učestanosti sa beskonačno mnogo minimuma i maksimuma unutar jednog perioda.

Uslov apsolutne integrabilnosti garantuje da su svi članovi Furijeovog reda konačni:

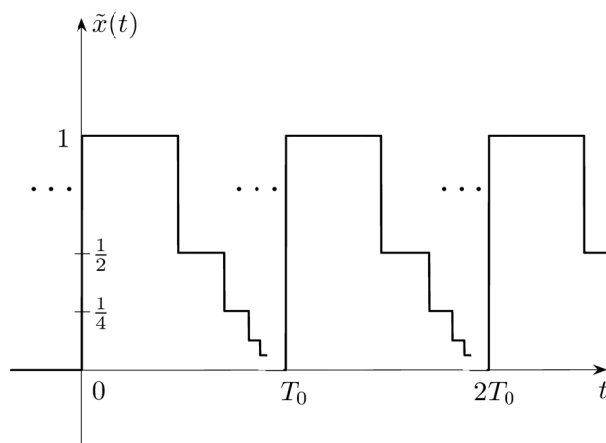
$$|C_k| = \left| \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)| dt < \infty. \quad (5.12)$$

U praksi se vrlo rijetko javljaju signali koji ispunjavaju uslov apsolutne integrabilnosti, a ne ispunjavaju jedan ili oba preostala Dirihleova uslova.

Primjer signala koji je apsolutno integrabilan, ali ne zadovoljava drugi Dirihleov uslov jer ima beskonačno mnogo minimuma i maksimuma unutar jednog perioda, je  $\tilde{x}(t) = \sin \frac{2\pi T_0}{t}, 0 < t \leq T_0; \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + nT_0), n \in \mathbb{Z}$ , prikazan na Slici 5.3.

Primjer signala koji je apsolutno integrabilan, ali ne zadovoljava treći Dirihleov uslov, prikazan je na Slici 5.4. Posmatrajući taj signal vidimo da je svaki period signala podijeljen na beskonačno mnogo intervala, tako da je prvi interval jednak polovini perioda signala, a svaki naredni dva puta kraći od prethodnog. U svakom od tih beskonačno mnogo intervala vrijednost signala je konstantna i dva puta manja u odnosu na vrijednost u prethodnom intervalu. Prema tome, unutar jednog perioda signal ima beskonačno mnogo diskontinuiteta.





Slika 5.4 Signal sa beskonačno diskontinuiteta unutar jednog perioda.

## 5.2 Furijeov red realnih signala

Svi prethodno izvedeni izrazi vrijede kako za realne, tako i za kompleksne signale. Ipak, u praksi se najčešće radi sa realnim signalima, pa ćemo stoga u analizi koja slijedi u ovom poglavlju uvesti takvu pretpostavku. Ako je signal realan, za koeficijente Furijeovog reda:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.13)$$

vrijedi da je:

$$C_k^* = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} \tilde{x}(t) e^{jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.14)$$

$$C_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} \tilde{x}(t) e^{jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.15)$$

Iz jednakosti (5.14) i (5.15) jasno slijedi da je:

$$C_{-k} = C_k^*. \quad (5.16)$$

Budući da je:

$$|C_k^*| = |C_k|, \quad (5.17)$$

$$\arg C_k^* = -\arg C_k, \quad (5.18)$$

zaključujemo da je amplitudni spektar realnih signala parna, a fazni spektar neparna funkcija:

$$|C_{-k}| = |C_k|, \quad (5.19)$$

$$\arg C_{-k} = -\arg C_k. \quad (5.20)$$

Uvedimo oznaku  $\theta_k = \arg C_k$ . Zbog parnosti amplitudnog i neparnosti faznog spektra, realni dijelovi koeficijenata Furijeovog reda realnih signala:

$$\operatorname{Re}\{C_k\} = |C_k| \cos \theta_k \quad (5.21)$$

su parni, dok su imaginarni dijelovi koeficijenata Furijeovog reda realnih signala neparni:

$$\operatorname{Im}\{C_k\} = |C_k| \sin \theta_k. \quad (5.22)$$

Na sličan način parnost i neparnost signala u vremenskom domenu utiče na koeficijente Furijeovog reda realnih signala. Pokazaćemo sada da su koeficijenti Furijeovog reda parnih realnih signala realni, dok su koeficijenti Furijeovog reda neparnih realnih signala čisto imaginarni.

Svaki signal može da se razloži na njegov parni  $\mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\}$  i neparni  $\mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\}$  dio:

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} + \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\}. \quad (5.23)$$

Znajući da je:

$$\tilde{x}(-t) = \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} - \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\}, \quad (5.24)$$

parni i neparni dijelovi signala se mogu odrediti na osnovu sljedećih izraza:

$$\mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{\tilde{x}(t) + \tilde{x}(-t)}{2}, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(-t)}{2}. \quad (5.26)$$

Posmatrajmo sada koeficijente Furijeovog reda parnog i neparnog dijela signala:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [\mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} + \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\}] [\cos(k\Omega_0 t) - j \sin(k\Omega_0 t)] dt = C_{kr} + jC_{ki}. \quad (5.27)$$

Koeficijenti Furijeovog reda parnog dijela signala:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} \cos(k\Omega_0 t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} \sin(k\Omega_0 t) dt = \\ & = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} \cos(k\Omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (5.28)$$

su realni, jer je integral neparne funkcije  $\mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} \sin(k\Omega_0 t)$  na jednom periodu jednak nuli, dok su koeficijenti Furijeovog reda neparnog dijela signala čisto imaginarni:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} \cos(k\Omega_0 t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} \sin(k\Omega_0 t) dt = \\ & = -j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} \sin(k\Omega_0 t) dt, \end{aligned} \quad (5.29)$$

zbog toga što je integral neparne funkcije  $\mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} \cos(k\Omega_0 t)$  na jednom periodu jednak nuli. Stoga vrijedi da je:

$$C_{kr} = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{P}\{\tilde{x}(t)\} \cos(k\Omega_0 t) dt, \quad (5.30)$$

$$C_{ki} = -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \mathcal{N}\{\tilde{x}(t)\} \sin(k\Omega_0 t) dt, \quad (5.31)$$

što znači da parni dio signala generiše realni dio Furijeovog reda, dok neparni dio signala generiše imaginarni dio Furijeovog reda.

### 5.3 Trigonometrijski oblik Furijeovog reda

Realne kontinualne periodične signale možemo, osim preko kompleksnog, predstaviti i preko trigonometrijskog oblika Furijeovog reda. Uz oznaku  $C_k = |C_k| e^{j\theta_k}$ , koristeći parnost amplitudnog (5.19) i neparnost faznog spektra (5.20), dobijamo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk\Omega_0 t} + C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} = \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} e^{-jk\Omega_0 t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \left[ e^{j(k\Omega_0 t + \theta_k)} + e^{-j(k\Omega_0 t + \theta_k)} \right] = \\ &= C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(k\Omega_0 t + \theta_k). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Konačan trigonometrijski oblik Furijeovog reda je:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_0 t + b_k \sin k\Omega_0 t), \quad (5.33)$$

gdje su koeficijenti u razvoju signala dati sa:

$$\begin{aligned} a_0 &= C_0, \\ a_k &= 2|C_k| \cos \theta_k, \\ b_k &= -2|C_k| \sin \theta_k. \end{aligned} \tag{5.34}$$

## 5.4 Parsevalova teorema za kontinualne periodične signale

Za proizvoljan kompleksan signal, trenutnu snagu definišemo sa  $p_x(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ . Srednja snaga periodičnog signala je jednaka integralu trenutne snage na jednom periodu:  $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} p_x(t) dt$ . Periodični signali imaju beskonačnu energiju, ali konačnu srednju snagu:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt. \tag{5.35}$$

Pri razvoju signala u Furijeov red spektralni koeficijenti nose potpunu informaciju o signalu, jer je na osnovu njih moguće tačno rekonstruisati signal, osim eventualno u konačno mnogo izolovanih tačaka. Znajući to, za očekivati je da srednju snagu signala možemo izračunati na osnovu njegovih spektralnih koeficijenata.

Polazeći od izraza za sintezu signala:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t} \tag{5.36}$$

i njegovog konjugovano kompleksnog oblika:

$$\tilde{x}^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{-jk\Omega_0 t} \tag{5.37}$$

slijedi:

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \tilde{x}^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{-jk\Omega_0 t} \right] dt = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* \left[ \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* C_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Konačno imamo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2. \tag{5.39}$$

Posljednja jednakost, koja se naziva *Parsevalova teorema* za periodične kontinualne signale, govori o održanju snage pri prelasku iz vremenskog u transformacioni (frekvencijski) domen, tako da srednju snagu signala možemo, osim u vremenskom domenu, računati sumirajući kvadrate koeficijenata amplitudnog spektra. Na osnovu Parsevalove teoreme, srednja snaga složenoperiodičnog signala je jednaka sumi snaga pojedinačnih harmonika.

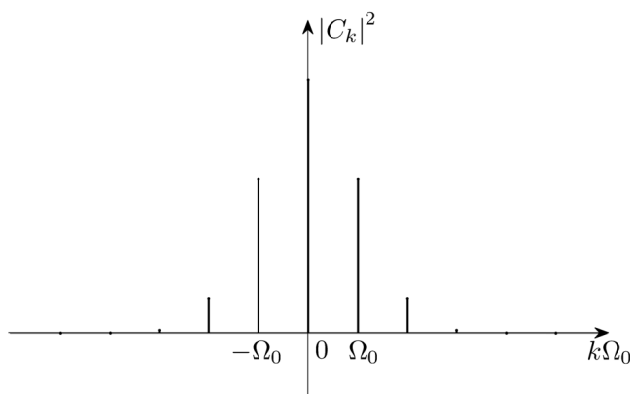
Posmatrajmo prostoperiodični eksponencijalni signal  $\tilde{x}(t) = C_m e^{jm\Omega_0 t}$ . Jednostavnim poređenjem sa (5.1) zaključujemo da svi koeficijenti  $C_k$  Furijeovog reda, osim za  $k = m$ , moraju biti jednaki nuli. U spektru signala se pojavljuje samo jedna komponenta na učestanosti  $m\Omega_0$ . Srednja snaga signala je jednaka snazi te harmonijske komponente,  $P = |C_m|^2$ .

Za realni prostoperiodični signal:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \sqrt{2} |C_m| \cos(m\Omega_0 t + \theta_m) = |C_m| \frac{e^{j(m\Omega_0 t + \theta_m)} + e^{-j(m\Omega_0 t + \theta_m)}}{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (C_m e^{jm\Omega_0 t} + C_m e^{-jm\Omega_0 t}),
\end{aligned} \tag{5.40}$$

u spektru signala se pojavljuju dvije komponente na učestanostima  $\pm m\Omega_0$ , vrijednosti  $\frac{C_m}{\sqrt{2}}$ , gdje smo koristili oznaku  $C_m = |C_m| e^{j\theta_m}$ . Srednja snaga ovog signala je jednaka:

$$P = \frac{1}{2} |C_m|^2 + \frac{1}{2} |C_m|^2 = |C_m|^2. \tag{5.41}$$



Slika 5.5 Primjer spektra snage signala.

Distribucija snage po spektralnim komponentama zavisi od vremenskog oblika signala. Skup frekvencijskih komponenti  $\{|C_k|^2\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  se u literaturi naziva *spektralna gustina snage*, *gustina spektra snage* ili kratko *spektar snage* signala. Za realne signale vrijedi  $|C_{-k}|^2 = |C_k|^2$ , što znači da je spektar snage parna funkcija. Primjer gustine spektra snage signala dat je na Slici 5.5.

Primjer 5.1:

Odrediti i nacrtati spektar signala  $\tilde{x}(t) = \cos(100\pi t)$ .

*Rješenje:*

Poređenjem sa opštim oblikom  $\cos(2\pi F_0 t)$ , odredimo period signala:

$$2\pi F_0 = 100\pi \Rightarrow F_0 = 50\text{Hz} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{50\text{Hz}} = 20\text{ms}. \quad (5.42)$$

Koeficijenti Furijeovog reda su dati sa:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in Z, \quad (5.43)$$

te je:

$$\begin{aligned} C_k &= 50\text{Hz} \int_{-10\text{ms}}^{10\text{ms}} \cos(100\pi t) e^{-jk100\pi t} dt = \\ &= 50\text{Hz} \int_{-10\text{ms}}^{10\text{ms}} \cos(100\pi t) [\cos(k100\pi t) - j \sin(k100\pi t)] dt. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Imaginarni dio podintegralne funkcije je neparna funkcija vremena, te je integral tog dijela na jednom periodu jednak nuli. Zbog toga je:

$$C_k = 50\text{Hz} \int_{-10\text{ms}}^{10\text{ms}} \cos(100\pi t) \cdot \cos(k100\pi t) dt. \quad (5.45)$$

Ako se posmatra grafički prikaz proizvoda dvije kosinusoide učestanosti  $\Omega_0$  i  $k\Omega_0$ , (na Slici 5.6 je ilustracija za  $k=4$ ), lako je uočiti da je površina ispod tog proizvoda na jednom periodu jednaka nuli, te je prethodni integral jednak nuli za svako  $k$ , osim za  $k=\pm 1$ :

$$\begin{aligned} C_{\pm 1} &= 50\text{Hz} \int_{-10\text{ms}}^{10\text{ms}} \cos^2(100\pi t) dt = 50\text{Hz} \int_{-10\text{ms}}^{10\text{ms}} \frac{1 + \cos(2 \cdot 100\pi t)}{2} dt = \\ &= 50\text{Hz} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20\text{ms} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

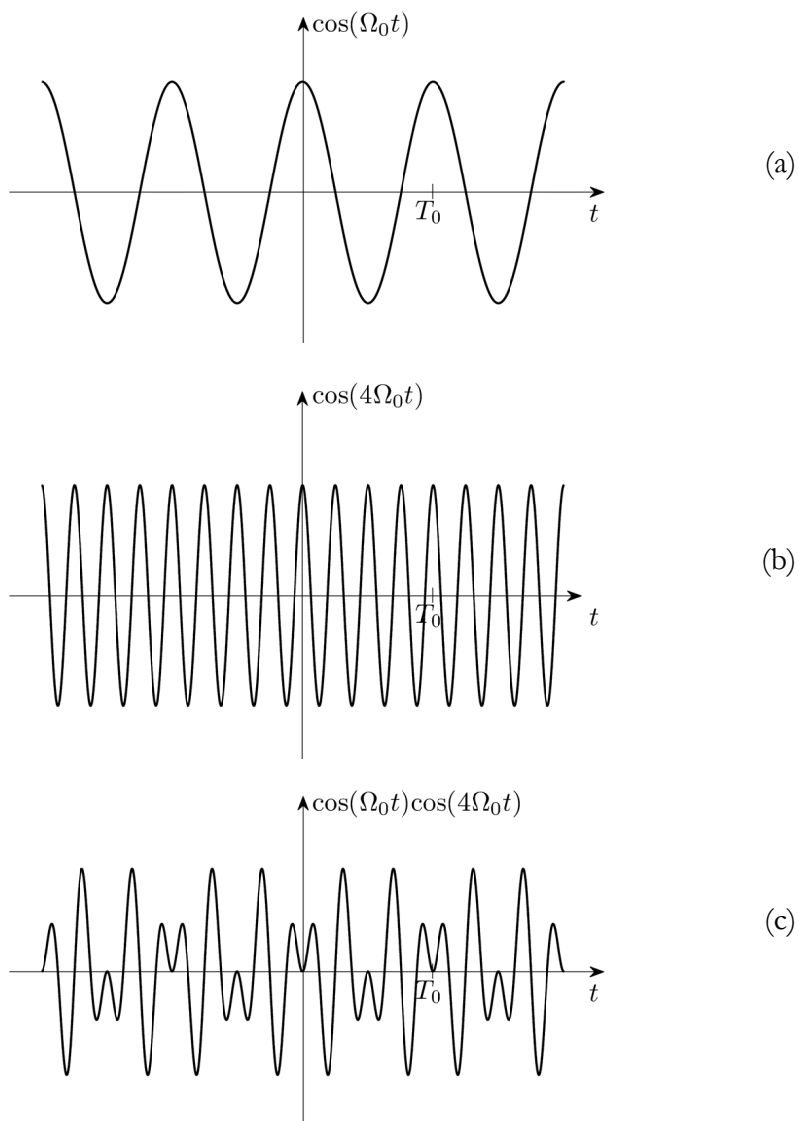
jer je i integral kosinusoide učestanosti  $2\Omega_0$  na jednom periodu jednak nuli.

Dakle,

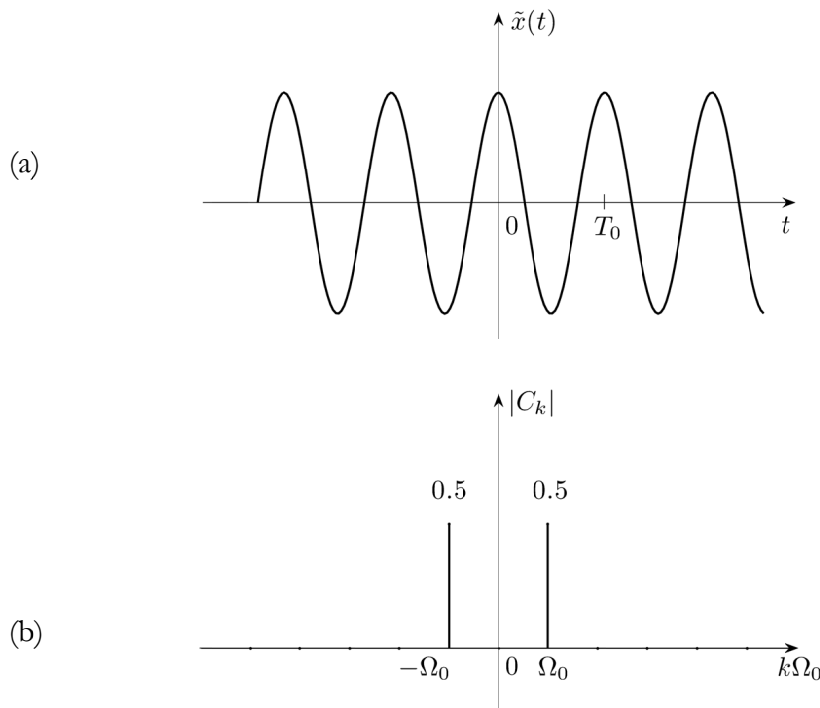
$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}. \quad (5.47)$$

Amplitudni spektar datog prostoperiodičnog signala sa Slike 5.7(a) prikazan je na Slici 5.7(b). Signal je paran i realan, pa su njegovi koeficijenti Furijeovog reda realni, a amplitudni spektar paran. Fazni spektar je jednak nuli.





Slika 5.6 Proizvod harmonijskih komponenti: (a) prostoperiodični signal učestanosti  $\Omega_0$ ; (b) prostoperiodični signal učestanosti  $4\Omega_0$  i (c) proizvod  $\cos(\Omega_0 t)\cos(4\Omega_0 t)$ .



Slika 5.7 (a) Prostoperiodični signal i (b) njegov amplitudni spektar.

Do ovog rješenja smo mogli doći jednostavnije, direktnim poređenjem signala  $\tilde{x}(t) = \cos(100\pi t) = \frac{e^{j2\pi \cdot 50t} + e^{-j2\pi \cdot 50t}}{2}$  sa izrazom za sintezu signala pomoću Furijeovog reda  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}$ . Tako zaključujemo da je osnovna učestanost  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , te da su svi koeficijenti Furijeovog reda jednaki nuli, osim za  $k = \pm 1$ , kada imaju vrijednost  $\frac{1}{2}$ .

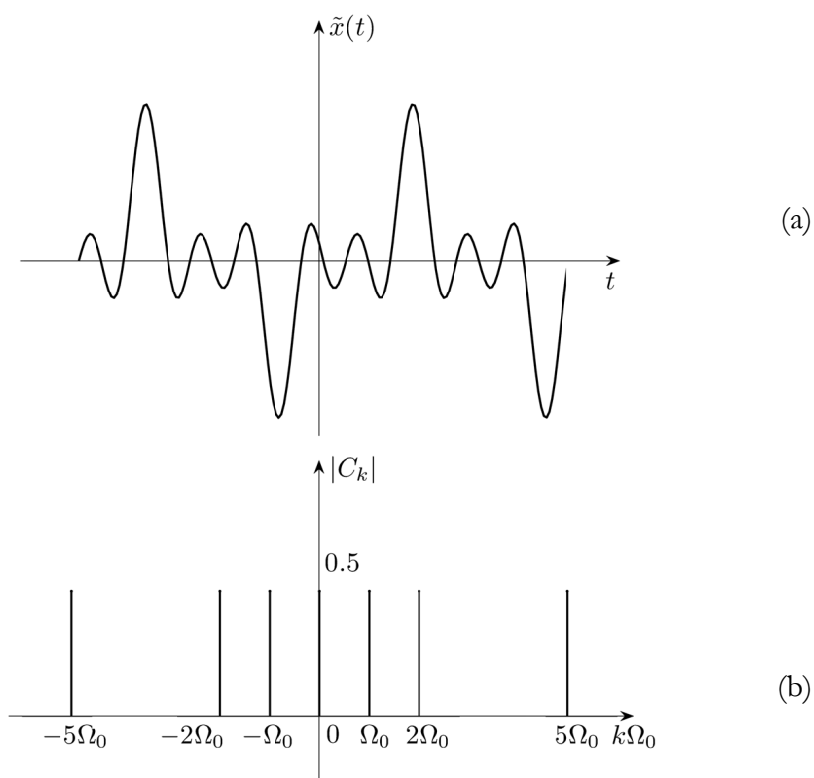
□

Primjer 5.2:

Odrediti i nacrtati spektar signala  $\tilde{x}(t) = \cos \Omega_0 t + \cos 2\Omega_0 t + \cos 5\Omega_0 t$ .

*Rješenje:*

Ovaj složenoperiodični signal je periodičan sa osnovnim periodom  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ , a spektralne komponente signala su definisane za diskretne učestanosti  $\Omega = k\Omega_0$ . Svi koeficijenti Furijeovog reda su jednaki nuli osim za  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 5$ , kada imaju vrijednost 0,5. Amplitudni spektar datog složenoperiodičnog signala dat je na Slici 5.8. Fazni spektar je jednak nuli.

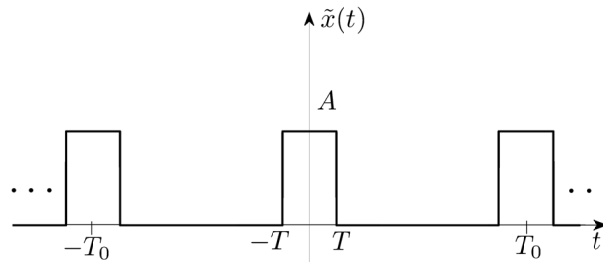


Slika 5.8 (a) Složenoperiodični signal i (b) spektar tog signala.

□

Primjer 5.3:

Odrediti i nacrtati koeficijente Furijeovog reda povorke pravougaonih impulsa prikazane na Slici 5.9.



Slika 5.9 Povorka pravougaonih impulsa.

*Rješenje:*

Koeficijenti Furijeovog reda:

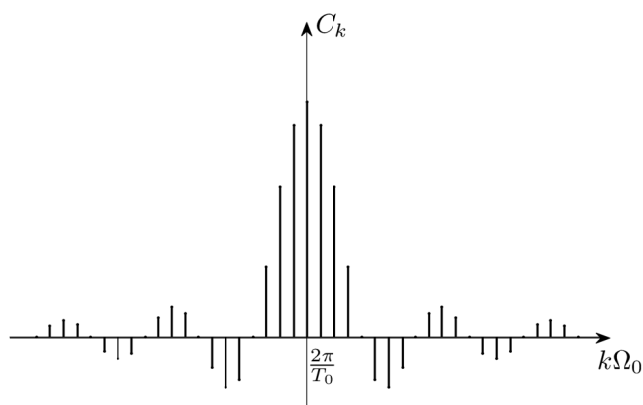
$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (5.48)$$

za  $k \neq 0$  imaju oblik:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-jk\Omega_0 t}}{-jk\Omega_0} \Big|_{-T}^T = \frac{A}{T_0} \frac{e^{jk\Omega_0 T} - e^{-jk\Omega_0 T}}{jk\Omega_0} = 2A \frac{T}{T_0} \frac{e^{jk\Omega_0 T} - e^{-jk\Omega_0 T}}{j2k\Omega_0 T} = \\ &= \frac{2AT}{T_0} \frac{\sin k\Omega_0 T}{k\Omega_0 T} = \frac{2AT}{T_0} \operatorname{sinc} k\Omega_0 T = \frac{2AT}{T_0} \operatorname{sinc} k2\pi \frac{T}{T_0}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Za  $k=0$  dobijamo srednju vrijednost signala:

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \Big|_{k=0} = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A dt = \frac{2AT}{T_0}. \quad (5.50)$$



Slika 5.10 Koeficijenti Furijeovog reda povorke pravougaonih impulsa sa Slike 5.9.

Budući da je signal paran, njegovi koeficijenti Furijeovog reda su realni i možemo ih jednostavno prikazati grafički, kao na Slici 5.10. Pod uslovom da je  $\frac{T}{T_0}$  racionalan broj, nule u spektru signala se pojavljuju na diskretnim učestanostima:

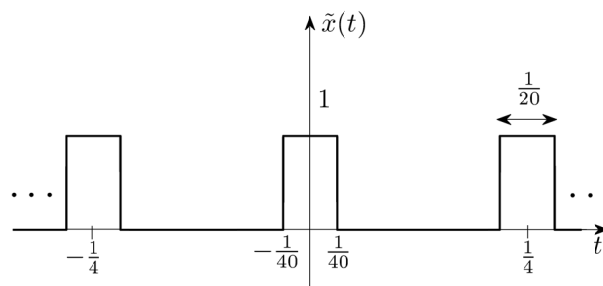
$$k\Omega_0 T = n\pi \Rightarrow k\Omega_0 = \frac{n\pi}{T}, \quad (5.51)$$

inače spektar nema nule, a ako bi se nacrtala anvelopa koeficijenata Furijeovog reda na kontinualnoj osi  $\Omega$ , nule te anvelope bi bile za  $\Omega = \frac{n\pi}{T}$ .

□

Primjer 5.4:

Pronađi srednju snagu signala sa Slike 5.11 sadržanu u dijelu do prve nule u njegovom spektru. Period signala je  $T_0 = \frac{1}{4}$ , a širina impulsa  $2T = \frac{1}{20}$ . Amplituda impulsa je  $A = 1$ .



Slika 5.11 Povorka pravougaonih impulsa.

*Rješenje:*

Odnos polovine širine impulsa i perioda signala je:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{10} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{1}{10}. \quad (5.52)$$

Osnovna učestanost signala je:

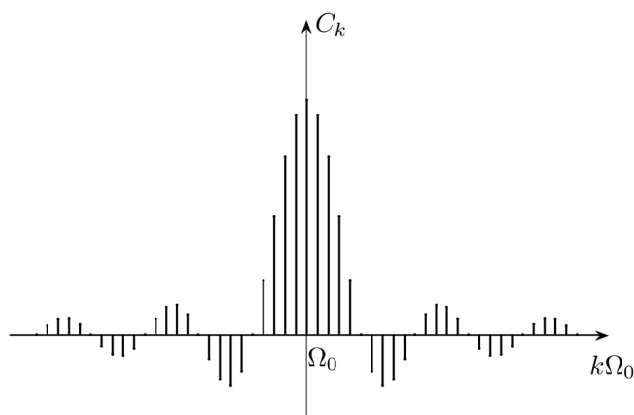
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi. \quad (5.53)$$

Koeficijenti Furijeovog reda za  $k \neq 0$  su:

$$C_k = 2A \frac{T}{T_0} \text{sinc } k\Omega_0 T = 2A \frac{T}{T_0} \text{sinc } k2\pi \frac{T}{T_0} = \frac{1}{5} \text{sinc } \frac{k\pi}{5}, \quad (5.54)$$

dok je:

$$C_0 = 2A \frac{T}{T_0} = \frac{1}{5}. \quad (5.55)$$



Slika 5.12 Koeficijenti Furijeovog reda signala sa Slike 5.11.

Prva nula u spektru signala nastupa za:

$$k\Omega_0 = \frac{\pi}{T} \Rightarrow k \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{T} \Rightarrow k = \frac{T_0}{2T} = 5. \quad (5.56)$$

Na Slici 5.12 prikazani su koeficijenti Furijeovog reda datog signala.

Ukupna srednja snaga signala je jednaka:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T |\tilde{x}(t)|^2 dt = 4 \int_{-\frac{1}{40}}^{\frac{1}{40}} 1^2 dt = 0,2. \quad (5.57)$$

Srednja snaga sadržana u harmonicima do prve nule u spektru signala je:

$$\begin{aligned} P_5 &= C_0^2 + 2(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) = \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left[ \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right] \approx \\ &\approx 0,18. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Primjetimo da je približno 90% od ukupne srednje snage signala sadržano u prvih pet koeficijenata Furijeovog reda. Ako bismo zanemarili sve ostale komponente i rekonstruisali signal samo na osnovu prvih pet koeficijenata Furijeovog reda, dobili bismo približan oblik signala. Ova činjenica se koristi prilikom kompresije signala, gdje se, umjesto potpunog signala u

vremenskom ili transformacionom domenu, memoriše i prenosi samo dio koeficijenata iz transformacionog domena koji nose najviše informacija o signalu.

□

## 5.5 Generalisani Furijeov red

Razvoj signala u Furijeov red predstavlja samo jedan od mogućih oblika predstavljanja signala preko elementarnih funkcija, pri čemu su te elementarne funkcije oblika  $\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Osim preko kompleksnih eksponencijalnih funkcija različitih učestanosti, pokazaćemo da je razvoj signala moguć i preko drugih skupova ortogonalnih funkcija.

Posmatrajmo skup funkcija:

$$\{\dots\varphi_{-k}(t), \dots, \varphi_{-1}(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots\varphi_k(t), \dots\}. \quad (5.59)$$

Ako su funkcije iz datog skupa, koje mogu biti i kompleksne, definisane na intervalu  $t_1 \leq t \leq t_2$  i takve da na tom intervalu postoji integral umnoška  $\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)$  bilo koje dvije funkcije iz tog skupa, kažemo da je dati skup funkcija *ortogonalan* na intervalu  $t_1 \leq t \leq t_2$  ako vrijedi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \text{const}, & i = j \end{cases}. \quad (5.60)$$

Ako uz to vrijedi da je  $\text{const} = 1$ , tako da je:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad (5.61)$$

kažemo da je skup funkcija *ortonormalan* na intervalu  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Na primjer, prebrojiv skup kompleksnih eksponencijalnih funkcija:

$$\{\dots e^{-jk\Omega_0 t}, \dots, e^{-j\Omega_0 t}, 1, e^{j\Omega_0 t}, \dots e^{jk\Omega_0 t}, \dots\}, \quad (5.62)$$



na koje se vrši razvoj signala preko Furijeovog reda, je ortogonalan na intervalu  $0 \leq t \leq T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  i svakom drugom intervalu veličine osnovnog perioda  $T_0$ .

Za skup funkcija kažemo da je *kompletan* ako ne egzistira niti jedna funkcija  $\psi(t)$  van tog skupa za koju vrijedi da je ortogonalna na sve funkcije iz datog skupa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi_i^*(t) dt = 0, \quad \forall \varphi_i \Rightarrow \psi(t) = 0. \quad (5.63)$$

Na primjer, skup funkcija:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1, & (i-1)\frac{T}{N} < t < i\frac{T}{N}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad N \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{za druge vrijednosti } t \end{cases}, \quad (5.64)$$

je ortogonalan na intervalu  $0 \leq t \leq T$ , ali nije kompletan jer egzistira funkcija:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \frac{T}{N} \\ -1, & \frac{1}{2} \frac{T}{N} \leq t \leq \frac{T}{N} \\ 0, & \frac{T}{N} \leq t \leq T \end{cases}, \quad (5.65)$$

koja je ortogonalna na datom intervalu na sve funkcije iz datog skupa.

Razmotrimo sada mogućnost razvoja signala preko funkcija iz prebrojivog skupa ortogonalnih funkcija:

$$\{\dots \varphi_{-k}(t), \dots, \varphi_{-1}(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots\}. \quad (5.66)$$

Pretpostavimo da signal možemo predstaviti težinskom sumom ovih funkcija:

$$x(t) = \dots + c_{-k} \varphi_{-k}(t) + \dots + c_{-1} \varphi_{-1}(t) + c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_k \varphi_k(t) + \dots \quad (5.67)$$

Da bi to bilo moguće, potrebno je pronaći način za određivanje koeficijenata  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  u navedenoj težinskoj sumi. S tim ciljem, pomnožimo

prethodnu jednakost sa funkcijom  $\varphi_k^*(t)$  i pronađimo integral na intervalu  $t_1 \leq t \leq t_2$ , na kom su funkcije iz navedenog skupa ortogonalne:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_k^*(t) dt &= \\ &= \dots + c_{k-1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{k-1}(t) \varphi_k^*(t) dt + c_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt + c_{k+1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{k+1}(t) \varphi_k^*(t) dt + \dots \end{aligned} \quad (5.68)$$

Zbog ortogonalnosti funkcija, svi integrali s desne strane jednakosti (5.68), osim  $\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt$ , su jednaki nuli, pa se vrijednosti koeficijenata u razvoju (5.67) mogu odrediti na sljedeći način:

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.69)$$

Razvoj signala preko ortogonalnih funkcija (5.67) nazivamo *generalisani Furijeov red*, a koeficijente tog razvoja (5.69) koeficijentima generalisanog Furijeovog reda. Specijalan slučaj ovog razvoja predstavlja razvoj preko kompleksnih eksponencijalnih funkcija  $\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , koje su ortogonalne na intervalu  $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\Omega_0} = T_0$ . Koeficijenti  $c_k$  su tada jednaki koeficijentima Furijeovog reda:

$$c_k = C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.70)$$

jer je:

$$\int_{T_0} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt = \int_{T_0} e^{jk\Omega_0 t} e^{-jk\Omega_0 t} dt = \int_{T_0} 1 \cdot dt = T_0, \quad (5.71)$$

a razvoj signala preko ortogonalnih funkcija (5.67) postaje razvoj signala u Furijeov red:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.72)$$

Svaka elementarna funkcija u Furijevom redu je periodična sa osnovnim periodom  $T_0$ , pa prema tome i signal koji se razvija u Furijev red kao zbir ovih elementarnih funkcija mora biti periodičan sa istim osnovnim periodom.

## 5.6 Prekinuti razvoj signala u Furijev red

Ako se posmatra *prekinuti razvoj signala u Furijev red*, uzimajući konačan broj članova Furijevog reda u izrazu za sintezu signala (5.8):

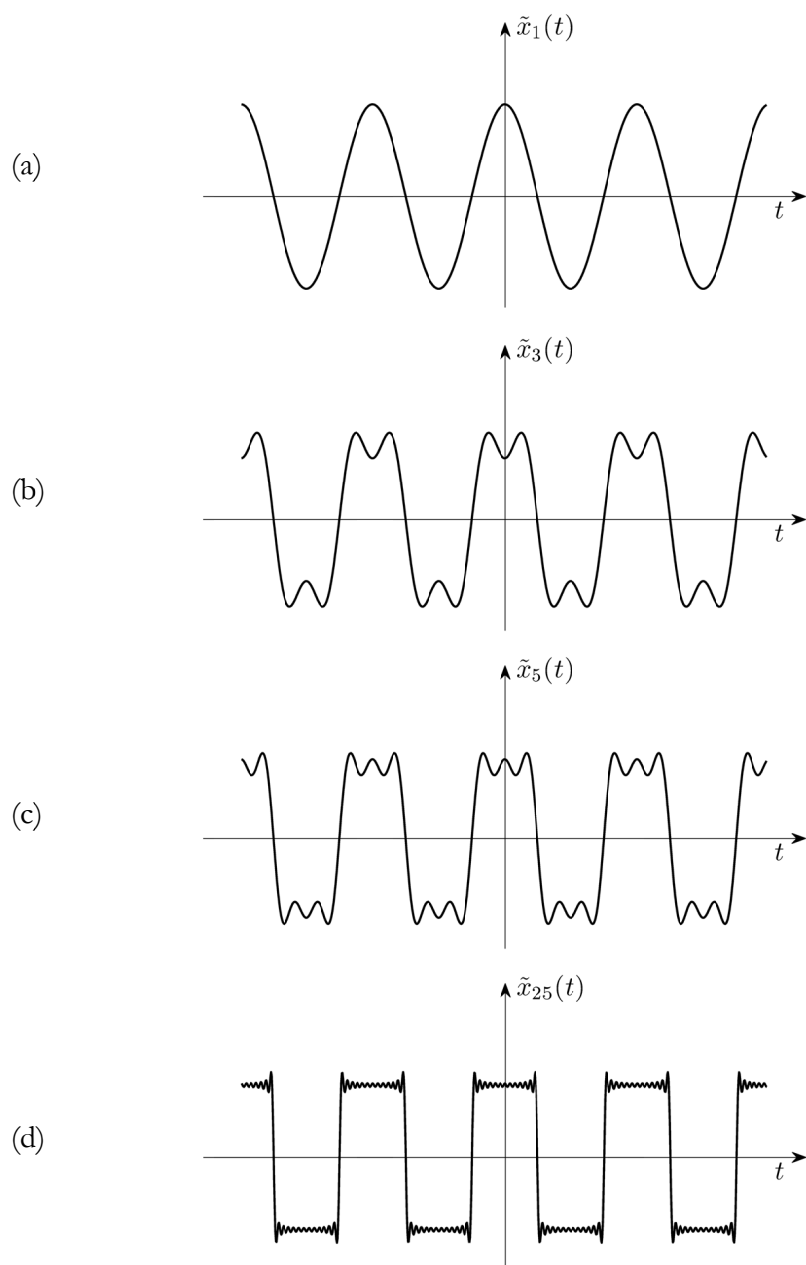
$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad (5.73)$$

umjesto originalnog signala  $x(t)$ , dobićemo aproksimaciju signala. Na Slici 5.13 prikazana je rekonstrukcija povorke pravougaonih impulsa na osnovu nekoliko prvih članova Furijevog reda sa Slike 5.10. Na sličan način se definiše i prekinuti razvoj signala u generalisani Furijev red:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \varphi_k(t). \quad (5.74)$$

Povećavajući broj članova Furijevog reda, rekonstruisani signal postaje sve sličniji originalnom signalu, ali u rekonstruisanom signalu uvijek ostaju karakteristične oscilacije i premašenja čije se amplitude ne smanjuju, već se samo povećava njihova učestanost. Ova pojava nazvana je Gibsov fenomen i o njoj će biti više riječi u Glavi 6. Iako se razlika vrijednosti originalnog i rekonstruisanog signala ne smanjuje u svakom trenutku vremena zbog pojave Gibsovog fenomena, pokazaćemo da se sa povećanjem broja članova Furijevog rada smanjuje srednjekvadratna greška definisana sa:

$$J_N = \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt. \quad (5.75)$$



Slika 5.13 Aproksimacija povorke pravougaonih impulsa prekinutim razvojem u Furijeov red: (a)  $N=1$ ; (b)  $N=3$ ; (c)  $N=5$  i (d)  $N=25$ .

Kada se broj članova razvoja u Furijev red neograničeno povećava, srednjekvadratna greška teži ka nuli. Jednako vrijedi za razvoj preko bilo kog skupa ortogonalnih funkcija.

*Dokaz:*

Posmatrajmo aproksimaciju signala datu konačnom težinskom sumom ortogonalnih funkcija:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k \varphi_k(t). \quad (5.76)$$

Definišimo mjeru pogreške koju činimo pri ovakvoj aproksimaciji signala kao srednjekvadratno odstupanje aproksimacije (5.76) od originalnog signala na intervalu ortogonalnosti funkcija:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x_N(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right|^2 dt = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right] \cdot \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right]^* dt. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Minimalna greška se dobija za takve vrijednosti koeficijenata  $a_k$  u razvoju signala pri kojima je  $\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0$ . Pri traženju izvoda iskoristićemo činjenicu da je

izvod konjugovano kompleksne funkcije jednak konjugovano kompleksnom izvodu te funkcije. Pored toga, prilikom određivanja izvoda sume ostaje samo izvod onog člana koji sadrži koeficijent po kom se računa izvod. Na taj način za izvod srednjekvadratne greške dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_k} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right] \cdot \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right]^* dt = \\ &= -\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \cdot \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right]^* dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t) \right] \cdot \varphi_k^*(t) dt. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Integrali u prethodnom izrazu su međusobno konjugovano kompleksni, te je dovoljno jedan od njih izjednačiti s nulom kako bi izvod srednjekvadratne greške bio jednak nuli. Na taj način dolazimo do uslova pri kom se dobija najmanja srednjekvadratna greška:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_k^*(t) dt = a_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt. \quad (5.79)$$

Ovaj uslov se, nakon operacije konjugovanja, može napisati u ekvivalentnom obliku:

$$\int_{t_1}^{t_2} x^*(t) \varphi_k(t) dt = a_k^* \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k^*(t) \varphi_k(t) dt. \quad (5.80)$$

Dakle, najmanja srednjekvadratna greška pri aproksimaciji signala se dobija ako su koeficijenti u težinskoj sumi jednaki koeficijentima generalisanog Furijeovog reda:

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt} = c_k. \quad (5.81)$$

U slučaju ovako odabranih koeficijenata pri aproksimaciji signala dobija se minimalna vrijednost srednjekvadratne greške, odnosno, greška koja se dobija pri aproksimaciji signala prekinutim generalisanim Furijeovim redom:

$$J_N = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x^*(t) dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N c_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) x^*(t) dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N c_k^* \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_k^*(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N c_k c_k^* \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt. \quad (5.82)$$

Pri tome je korišćena osobina ortogonalnosti funkcija. Ovaj izraz se može pojednostaviti uvrštavanjem uslova pri kome nastupa minimum:

$$\begin{aligned}
 J_N = & \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N c_k c_k^* \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k^*(t) \varphi_k(t) dt - \\
 & - \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N c_k^* c_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_k(t)|^2 dt,
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

što se svodi na:

$$J_N = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_k(t)|^2 dt \right]. \tag{5.84}$$

Budući da su elementi sume uvijek pozitivni, greška aproksimacije signala preko ortogonalnih funkcija  $J_N$  se smanjuje pri povećanju broja članova reda. Kada broj članova neograničeno raste, tj. kada  $N \rightarrow \infty$ , srednjekvadratna greška aproksimacije teži ka nuli i tada vrijedi:

$$J_N = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_k(t)|^2 dt. \tag{5.85}$$

Za  $\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$  integral  $\int_{t_1}^{t_2} |\varphi_k(t)|^2 dt$  je na osnovnom periodu  $T_0$  jednak  $T_0$ , te je poslednji izraz, zapravo, Parsevalova teorema za periodične kontinualne signale:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2. \tag{5.86}$$

Ovo razmatranje je u skladu sa ranijim primjerima kroz koje smo vidjeli da je najveći dio snage signala sadržan u prvih nekoliko harmonika Furijeovog reda i da se snaga signala, koja se računa preko Parsevalove teoreme, povećava i približava snazi originalnog signala dodavanjem članova iz spektra snage na višim učestanostima.

Napomenimo još jednom da ovaj vid konvergencije u normi pri aproksimaciji signala, koji nam govori o tome da se srednja snaga aproksimiranog signala povećava pri povećanju broja članova reda i približava srednjoj snazi originalnog signala, ne znači da aproksimirani signal u svakom

trenutku vremena teži originalnom signalu, te ovu vrstu konvergencije ne treba miješati sa tačkastom konvergencijom:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k \varphi_k(t) = f(t). \quad (5.87)$$

Prekinuti razvoj signala na ortogonalne funkcije ima veliku praktičnu primjenu u kompresiji signala i postao je dio JPEG, MP3 i MPEG standarda za kompresiju slike, audio i video signala.